



شبیه‌سازی عددی پسروری سه‌بعدی گرین در موتورهای سوخت جامد با روش سطوح هم‌تراز

محمد مهدی قیصری¹، سید مهدی میرساجدی^{2*}

تهران - دانشگاه شهید بهشتی

(تاریخ وصول: 92/10/25، تاریخ پذیرش: 93/02/04)

چکیده

در این تحقیق با ارائه الگوریتمی بر مبنای روش سطوح هم‌تراز، پسروری عددی گرین‌های سه‌بعدی پیچیده در چهار حالت عایق‌بندی شده، چند نرخی، با نرخ سوزش غیریکنواخت و با سوزش جهت‌دار شبیه‌سازی شده است. بدین منظور الگوریتم کلاسیکی که قبلاً توسط سایر نویسندگان برای تحلیل پسروری با روش سطوح هم‌تراز تدوین شده، در چهار گام تصحیح و تکمیل می‌شود؛ در گام اول با مدل‌سازی عایق‌های موتور با سه روش خطی، درجه دوم و ترکیبی، امکان تحلیل گرین‌های عایق‌بندی به الگوریتم کلاسیک افزوده می‌گردد. در گام دوم الگوریتم حل متناسب با گرین‌های چند نرخی طولی، ترکیبی و ترکیبی پیچیده تصحیح می‌شود. در گام سوم و چهارم نیز با شبیه‌سازی سوزش با نرخ‌های غیریکنواخت و جهت‌دار الگوریتم حل تکمیل می‌گردد. به منظور اعتبارسنجی کد عددی تدوین شده، یک گرین استوانه‌ای در چهار حالت مفروض در نظر گرفته شده و نتایج عددی پسروری هر حالت با نتایج حل تحلیلی مقایسه می‌شود. در ادامه پسروری چند گرین پیچیده که امکان حل آن‌ها با روابط تحلیلی یا الگوریتم‌های کلاسیک وجود ندارد، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد، به کمک روش سطوح هم‌تراز و الگوریتم تصحیح شده می‌توان پسروری انواع گرین‌های پیچیده سه‌بعدی را با دقت بالایی توصیف کرد.

واژه‌های کلیدی: پسروری گرین، روش سطوح هم‌تراز، عایق‌بندی، گرین چند نرخی، سوزش جهت‌دار.

1- مقدمه

مأموریت پروازی و نمودار تراست بر حسب زمان طراحی می‌گردد. بنابراین شکل مناسب گرین، تضمین‌کننده عملکرد صحیح‌تر موشک خواهد بود و مسئله‌ای که در ادامه آن مطرح می‌گردد، تحلیل پسروری گرین است.

یکی از مهم‌ترین قسمت‌های تشکیل‌دهنده موتورهای سوخت جامد، پیشران یا همان گرین موتور است. شکل گرین هر موشک بر اساس نوع

* E-mail: m_mirsajedi@sbu.ac.ir

1- کارشناس ارشد

2- استادیار

های تعقیب مرز که دربرگیرنده روش‌هایی مانند هیدرودینامیک ذرات هموار، لاگرانژی-اویلری و تعقیب رو به جلو است، نقاط شبکه گسترش یافته و مرز متحرک را دنبال می‌کنند. در عوض نقاط شبکه در روش‌های تسخیر مرز ثابت هستند. در بین روش‌های این دسته می‌توان به روش نشان‌گر و سلول، روش حجم سیال، روش میدان فازی و روش سطوح هم‌تراز اشاره کرد.

تلاش‌های زیادی برای شبیه‌سازی عددی پسروری گرین صورت گرفته که در ادامه بخشی از آن‌ها بیان می‌گردد؛ اشکریز و پو [8] طی تحقیقی روش حجم سیال را برای تحلیل پسروری گرین‌های دو بعدی مورد استفاده قرار دادند. نتایج نشان داد این روش دارای دقت کمی می‌باشد و برای رسیدن به جواب‌های منطقی به شبکه‌ای ریز نیاز است و تعمیم مسئله به ابعاد بالاتر نیازمند کار زیادی می‌باشد. هجل و همکارانش [9] با استفاده از روش نشان‌گر و سلول، تحلیل پسروری چند گرین را انجام دادند. روش حل آن‌ها دو بعدی با کاربرد محدود برای هندسه‌های متقارن را داشت. ویلکاکسو همکارانش [10] با استفاده از روش تابع حداقل فاصله شبیه‌سازی پسروری سوزش یک گرین سه‌بعدی را انجام دادند. نتایج نشان داد که این روش دقت مناسبی دارد ولی توانایی تحلیل گرین‌هایی با هندسه پیچیده را ندارد.

یلدیرام و همکارانش [11] با استفاده از روش سطوح هم‌تراز، پسروری چند گرین ساده را در حالت‌های دو بعدی و سه‌بعدی شبیه‌سازی کردند. مقایسه نتایج برنامه با داده‌های تست چند نمونه موتور آزمایشگاهی بیان‌گر دقت بالای روش بود. فاوینی و همکارانش [12] با استفاده از روش موتور Zefiro 9 (موتور مرحله سوم لانچر Vega) را شبیه‌سازی کردند. در این تحقیق برای تحلیل پسروری از روش سطوح هم‌تراز با نرخ پسروری ثابت و برای استخراج مشخصه‌های بالستیکی گرین از خواص توابع ضمنی (توابع هویساید و دلتای دیراک) استفاده شده است. کاولینی [13] یک کد عددی به نام "GREG" بر اساس روش سطوح هم‌تراز ارائه نموده و با لینک کردن این کد با کد تحلیل بالستیک داخلی موتور، به تحلیل موتورهای سه‌بعدی متداول پرداخت؛ مقایسه نتایج با داده‌های آزمایشگاهی نشان از دقت بالای نتایج داشت. مشیر استخاره و همکارانش [1] پسروری گرین‌های متداول سه‌بعدی را به صورت عددی شبیه‌سازی کردند. در این تحقیق پسروری‌ها با نرخ ثابت و برای گرین‌های تک‌نرخه انجام شده است. قیصری و میرساجدی [14] با بهبود الگوریتم سطوح هم‌تراز، پسروری گرین‌های دو بعدی را در با دقت بالایی تحلیل کردند؛ در این تحقیق زمان اجرا به طور محسوسی کاهش یافته است اما بررسی‌ها محدود به گرین‌های متداول و متداول بوده است.

از مطالعه منابع مختلف دو نکته قابل توجه است؛ اول این که روش سطوح هم‌تراز کارترین و دقیق‌ترین روش عددی برای شبیه‌سازی پسروری گرین است. و نکته دوم اینکه در همپژوهش‌های پیشین، برای

تحلیل پسروری در واقع مشخص کردن تغییرات هندسه گرین در طی زمان عملکرد موتور است. به عبارت دیگر در اثر سوختن سطح پیشران، هندسه گرین تغییر می‌کند و تغییر در هندسه، تغییر سطح سوزش را به دنبال دارد. یافتن سطح سوزش در هر لحظه به این علت اهمیت دارد که با داشتن تغییرات سطح سوزش و سطح گذرگاه جریان در هر گام زمانی حل، می‌توان فشار درون موتور موشک را یافت [1].

تحلیل پسروری گرین در واقع بررسی مرز متحرک و صرفاً یک تحلیل ریاضی و عددی می‌باشد. بنابراین تغییر شکل هندسی گرین، صرف‌نظر از جریان داخلی و اثرات حرارتی انجام شده و اطلاعات به دست آمده از تحلیل پسروری برای تحلیل بالستیک داخلی موتور مورد استفاده قرار می‌گیرد [2].

به طور کلی تحلیل پسروری گرین به سه دسته تحلیلی، ترسیمی و عددی تقسیم می‌شود [3]؛ از معروف‌ترین کدهایی که از روش‌های تحلیلی استفاده می‌کنند، می‌توان به کد SPP اشاره کرد [4]. این کد با تقسیم هندسه گرین به شکل‌های ساده‌تر، پارامترهای بالستیکی را در هر گام زمانی محاسبه می‌کند. یکی از محدودیت‌های SPP این است که پسروری با نرخ سوزش ثابت نسبت به مکان انجام می‌شود.

یکی دیگر از روش‌های تحلیلی پسروری گرین، روش phase-based می‌باشد. در این روش مراحل پسروری به چند فاز مختلف تقسیم شده و در هر فاز سطح سوزش توسط روابطی با فرم بسته ارائه می‌شوند. این روش ساده و بسیار سریع است اما محدود به هندسه‌های متداول و با نرخ پسروری ثابت می‌باشد [5].

در روش‌های ترسیمی هندسه اولیه گرین در یک نرم‌افزار ترسیمی مانند اتوکد یا سالیدورک ترسیم می‌شود؛ سپس سطوح سوزشی با یک مقدار مشخص offset می‌شوند و یک سری سطوح جدید موازی آن‌ها ایجاد می‌شوند. در این حالت ممکن است بعضی از سطوح از بدنه موتور بیرون بزند و یا کوتاه‌تر شود و به پوسته نرسد، به این دلیل نیاز است در هر گام offsetting، این موضوع بررسی شود و با استفاده از ابزارهای موجود این مشکلات به صورت دستی بر طرف شوند [6]. در این روش نمی‌توان نرخ سوزش متغیر در موتور را بررسی نمود (مانند اثر سوزش فرسایشی). به علاوه امکان کوپل شدن با برنامه بالستیک داخلی ممکن نیست.

بررسی منابع مختلفی که از روش‌های تحلیلی و ترسیمی برای پسروری استفاده کرده‌اند نشان می‌دهد، این روش‌ها تنها برای گرین‌هایی با هندسه ساده، نرخ پسروری ثابت و بدون اثر سوزش فرسایشی قابل توسعه می‌باشند. بنابراین با توجه به عدم جامعیت و کارایی پایین روش‌های ذکر شده، بهتر است از روش‌های عددی استفاده شود.

روش‌های عددی عموماً مرز متحرک بین گاز و پیشران جامد را مورد بررسی قرار می‌دهند و بر این اساس به دو دسته کلی تعقیب مرز¹ (لاگرانژی) و تسخیر مرز² (ویلری) تقسیم می‌شوند [7]. در روش -

۲- Interface Capturing Method

۱- Interface Tracking Method

می‌تواند دارای توابع سرعت مثبت یا منفی باشد، فرمول‌بندی وابسته به زمان برای مسئله تحلیل پسروری گرین انتخاب می‌شود.

2-1- تقریب عددی سطوح هم‌تراز وابسته به زمان

برای توسعه معادله روش سطوح هم‌تراز، ابتدا فرم اسکالر یک بعدی معادله (4) با استفاده از قانون بقاءهای پربولیک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_t + [G(u)]_x = 0 \quad (5)$$

از نقطه نظر حل عددی، می‌توان با استفاده از یک تابع شار عددی مناسب این رابطه را به صورت عددی تقریب زد؛ بنابراین با استفاده از یک تقریب اختلاف محدود پیشرو برای ترم اول و تقریب تفاضل محدود مرکزی برای ترم دوم، معادله (5) به صورت رابطه (6) بازنویسی می‌گردد:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{\Delta x} \quad (6)$$

تابع g باید به گونه‌ای انتخاب شود که شکل بقایی معادله حفظ و شرایط بی‌نظمی نیز ارضا شود و علاوه بر آن یک جواب هموار با دقت بالا و به دور از ناپیوستگی ایجاد کند. یکی از ساده‌ترین تقریب‌های عددی شار روش انکوئیسست-اوشر (EO) است، که برای معادله برگرز $G(u) = u^2$ به صورت زیر می‌باشد:

$$g_{EO}(u_l, u_r) = (\max(u_l, 0) + \min(u_r, 0))^2 \quad (7)$$

برای یافتن مقادیر جدید (φ_i^{n+1}) می‌توان از یک تقریب اختلاف مرکزی در φ استفاده کرد:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t g \left(\frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{\Delta y} \right) \quad (8)$$

برای حل معادله سطوح هم‌تراز، $u = \varphi_x$ و سرعت $F = 1$ فرض می‌شوند که در این صورت با استفاده از شکل عمومی معادله همیلتونین می‌توان نوشت:

$$\varphi_t + H(u) = 0 \quad (9)$$

در حالت خاص با در نظر گرفتن همیلتونین $H(u) = \sqrt{u}$ و استفاده از رابطه (7) معادله سطوح هم‌تراز یک بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t (\max(D_i^{-x}, 0) + \min(D_i^{+x}, 0))^{1/2} \quad (10)$$

این روش مجموعه سطح ارائه شده توسط ستیان است [15] و تا زمانی که همیلتونین در هر بعد فضا متقارن باشد، روش فوق برای هر متغیر در ابعاد دیگر می‌تواند به کار گرفته شود.

برای بدست آوردن معادله سطوح هم‌تراز در فضای سه‌بعدی، با در نظر گرفتن تابع سرعت F ، معادله همیلتونین $\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

ساده‌سازی مسئله تنها شرایط عمومی موتورهای سوخت جامد مدل‌سازی شده و تأثیر شرایطینظیر عایق‌بندی، سربند/ته‌بند و نرخ سوزش غیریکنواخت بر نتایج پسروری بررسی نشده است. همچنین هیچ‌گاه پسروری گرین‌های چند نرخی، برون‌سوز، درون‌سوز-برون‌سوز و همه‌طرف‌سوز مورد توجه قرار نگرفته است. بنابراین در این تحقیق سعی بر آن است که با توسعه الگوریتمی مبتنی بر روش عددی سطوح هم‌تراز، پسروری گرین‌های پیچیده سه‌بعدی در چهار حالت عایق‌بندی شده، چند نرخی، با نرخ سوزش غیریکنواخت و با سوزش جهت‌دار مورد بررسی قرار گیرد.

2-2- تئوری و معادلات حاکم

برای مدل‌سازی مسئله مرز متحرک بر مبنای روش تسخیر مرز سطوح هم‌تراز، دو فرمول‌بندی ساکن و وابسته به زمان ارائه شده است. فرمول‌بندی ساکن برای حالتی است که سرعت حرکت مرز در محدوده حل مثبت باشد؛ در این حالت برای مشخص کردن موقعیت مرز در حال گسترش، باید زمانی که مرز به هر نقطه (x, y) از شبکه زمینه می‌رسد محاسبه شود $(T(x, y))$. بنابراین معادله تابع به صورت زیر نوشته می‌شود [15]:

$$|\nabla T| F = 1 \quad (1)$$

در رابطه فوق T روی Γ برابر صفر است و Γ موقعیت اولیه مرز و در واقع یک شرط مرزی است.

در صورت گسترش مرز با سرعت مثبت یا منفی که منجر به پیشرو یا پسرو شدن حرکت مرز می‌شود، ممکن است مرز از یک نقطه (x, y) بیش از یک بار عبور کند؛ لذا تابع زمان $T(x, y)$ دیگر یک تابع تک مقداری نیست و باید فرمول‌بندی وابسته به زمان بکار گرفته شود. برای این کار موقعیت اولیه مرز به عنوان یک سطوح هم‌تراز صفر از یک تابع با بعد بالاتر φ در نظر گرفته می‌شود.

برای بدست آوردن معادله حرکت این تابع سطح تراز φ و ترکیب سطح تراز صفر φ با توسعه مرز، ابتدا لازم است که مقدار سطح تراز یک جزء روی مرز صفر باشد از این رو:

$$\varphi(x(t), t) = 0 \quad (2)$$

و با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$\varphi_t + \nabla \varphi(x(t), t) \cdot x'(t) = 0 \quad (3)$$

از آنجا که $n = \nabla \varphi / |\nabla \varphi|$ و $x'(t) \cdot n = F$ ، لذا معادله توسعه مرز φ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi(x, t = 0) \varphi_t + F |\nabla \varphi| = 0, \quad (4)$$

این رابطه سطوح هم‌تراز وابسته به زمان است [15].

هر دو فرمول‌بندی مذکور در تمامی ابعاد اعم از یک، دو و یا سه‌بعدی بدون تغییر می‌مانند و بدون نیاز به تفکیک یا ترکیب منحنی‌ها و سطوح، توانایی منطبق شدن به هر مرز دلخواهی را دارند؛ اما از آنجا که تحلیل پسروری بسته به درون‌سوز یا برون‌سوز بودن گرین مورد نظر،

محاسبه می‌شود و کم‌ترین فاصله محاسبه شده به عنوان تابع فاصله برای گره مورد نظر در شبکه کارترین $(\varphi_{i,j,k})$ در نظر گرفته می‌شود و این عمل برای کلیه نقاط شبکه ثانویه تکرار می‌شود.

گام چهارم - تعیین وضعیت نسبی نقاط: برای تعیین علامت تابع فاصله، باید موقعیت هر یک از نقاط شبکه کارترین نسبت به مرز گرین سنجیده شود. این کار به کمک المان‌های چهاروجهی شبکه اولیه و روش ضرب داخلی / خارجی بردارها انجام می‌شود. در پایان این گام و پس از مشخص شدن وضعیت نسبی نقاط، تابع فاصله با توجه به قوانین زیر تصحیح می‌شود:

➤ اگر نقطه شبکه در داخل مرز واقع شده باشد، مقدار حداقل فاصله در 1- ضرب می‌شود.

➤ اگر نقطه شبکه در خارج از مرز باشد، مقدار حداقل فاصله بدون تغییر باقی می‌ماند.

➤ اگر نقطه شبکه دقیقاً روی مرز قرار گیرد، حداقل فاصله صفر در نظر گرفته می‌شود.

گام پنجم - محاسبه مشخصه‌های بالستیکی: با پسروری گرین مشخصه‌های بالستیکی سطح سوزش و حجم محفظه احتراق تغییر می‌کنند، بنابراین لازم است در هر گام زمانی این مشخصه‌ها محاسبه شوند. بدین منظور در هر گام زمانی ابتدا مقدار تابع فاصله $(\varphi_{i,j,k})$ به کمک معادله سطوح هم‌تراز (رابطه 13) به‌روزرسانی می‌شود؛ سپس با استفاده از مقادیر جدید تابع فاصله، پارامترهای سطح سوزش و حجم محفظه احتراق محاسبه می‌گردد [17 و 1].

گام ششم: استخراج نتایج: در انتهای الگوریتم، داده‌های مرتبط با شبکه‌های تشکیل شده، پارامترهای بالستیکی، پروفیل پسروری و زمان اجرا جمع‌بندی و استخراج می‌گردد.

با استفاده از الگوریتم تشریح شده (الگوریتم کلاسیک)، می‌توان پسروری گرین‌های مختلف را به صورت دو یا سه‌بعدی با دقت بالایی تحلیل کرد [13]؛ اما مدل‌سازی گرین‌هایی با پیچیدگی‌هایی نظیر عایق‌بندی، چند نرخی، نرخ سوزش غیریکنواخت و سوزش جهت‌دار ممکن نیست. بنابراین در ادامه سعی می‌شود با ارائه تکنیک‌هایی، بر قابلیت‌های الگوریتم حاضر افزوده شود.

3-1- شبیه‌سازی گرین‌های عایق‌بندی شده

در پژوهش‌های پیشین همواره فرض بر این بوده که سوزش گرین از پورت شروع شده و تا رسیدن مرز به شعاع داخلی موتور ادامه می‌یابد [16 و 13]. اما بررسی ساختار موتورهای سوخت جامد عملیاتی نشان می‌دهد، در اکثر موتورهای case bond قسمت‌هایی از شعاع داخلی موتور (خارجی گرین) به دلایل مختلف عایق‌بندی می‌شود. بنابراین به دلیل تغییر جان در برخی نواحی، نیاز است عایق‌های موتور نیز مدل‌سازی شود و تأثیر یا عدم تأثیر آن‌ها بر نتایج پسروری و مشخصه‌های بالستیکی بررسی گردد.

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n - \Delta t g \left(\frac{\varphi_{ijk}^n - \varphi_{i-1,j,k}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{i+1,j,k}^n - \varphi_{ijk}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{ijk}^n - \varphi_{i,j-1,k}^n}{\Delta y}, \right. \quad (11)$$

$$\left. \frac{\varphi_{i,j+1,k}^n - \varphi_{ijk}^n}{\Delta y}, \frac{\varphi_{ijk}^n - \varphi_{i,j,k-1}^n}{\Delta z}, \frac{\varphi_{i,j,k+1}^n - \varphi_{ijk}^n}{\Delta z} \right)$$

و با کاربرد روش EO می‌توان نوشت:

$$g_{EO}(u_v, u_r, v_v, v_r, w_v, w_r) = [\max(u_v, \cdot)^+ + \min(u_r, \cdot)^+ + \max(v_v, \cdot)^+ + \min(v_r, \cdot)^+ + \max(w_v, \cdot)^+ + \min(w_r, \cdot)^+]^{1/2} \quad (12)$$

در نهایت معادله سطوح هم‌تراز سه‌بعدی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n - \Delta t (\max(F, \cdot)^+ + \min(F, \cdot)^-) \quad (13)$$

که در این رابطه مقادیر ∇^+ و ∇^- با استفاده از رابطه (14) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \nabla^+ &= [\max(D_{ijk}^{-x} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \min(D_{ijk}^{+x} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \\ &\max(D_{ijk}^{-y} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \min(D_{ijk}^{+y} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \\ &\max(D_{ijk}^{-z} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \min(D_{ijk}^{+z} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+]^{1/2} \\ \nabla^- &= [\max(D_{ijk}^{+x} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \min(D_{ijk}^{-x} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \\ &\max(D_{ijk}^{+y} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \min(D_{ijk}^{-y} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \\ &\max(D_{ijk}^{+z} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+ + \min(D_{ijk}^{-z} \varphi_{ijk}^n, \cdot)^+]^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

3- شبیه‌سازی پسروری گرین

الگوریتمی که برای تحلیل پسروری گرین‌های سه‌بعدی با روش سطوح هم‌تراز استفاده می‌شود (الگوریتم کلاسیک)، از شش گام کلی ذیل تشکیل شده است [17 و 16]:

گام اول - دریافت مشخصات اولیه موتور: در این گام ابتدا اطلاعات شبکه پورت (شبکه اولیه) که بیرون از کد اصلی و توسط یک نرم‌افزار تولید شبکه ایجاد شده، به صورت یک فایل عددی فراخوانی و داده‌های مربوط به مختصات نقاط شبکه و نحوه اتصال گره‌ها طبقه‌بندی می‌شوند. در مرحله دوم این گام نیز شعاع (قید نهایی سوزش) و مختصات ابتدا و انتهای موتور به همراه ابعاد شبکه حل از کاربر دریافت می‌گردد.

گام دوم - شبکه‌بندی: در این گام با توجه به شعاع موتور و همچنین ابعاد شبکه معین شده توسط کاربر، یک شبکه کارترین با المان‌های مکعبی در حجم موتور ایجاد می‌گردد (شبکه ثانویه)؛ این شبکه باید به گونه‌ای باشد که کل حجم موتور را در بر گیرد. در انتهای این گام با توجه به نرخ پسروری گرین، به هر یک از گره‌های شبکه تشکیل شده یک تابع سرعت نسبت داده می‌شود $(F_{i,j,k} = \dot{r})$.

گام سوم - تعیین تابع حداقل فاصله: برای تحلیل پسروری با روش سطوح هم‌تراز، لازم است موقعیت اولیه مرز یا سطح تراز سفر تعیین شود که بدین منظور از تابع حداقل فاصله استفاده می‌شود. برای تعیین تابع فاصله، فاصله هر گرهی شبکه کارترین با تمام نقاط شبکه اولیه

از آنجا که در تعریف معادله درجه دو، سه پارامتر نیاز است $(r = az^2 + bz + c)$ با دو نقطه نمی‌توان فرم کلی آن را تعیین کرد. از این رو فرض می‌شود در نقطه‌ای با ضخامت حداکثر، شیب منحنی صفر است.

ج) مدل‌سازی ترکیبی

می‌توان حالتی از عایق‌بندی را در نظر گرفت که در آن در قسمت‌های مختلف موتور، عایق‌های درجه اول و دوم قرار گرفته باشند. در این حالت به ازای هر عایق چهار پارامتر $\delta_1, \delta_2, z_1, z_2$ از کاربر درخواست می‌شود.

با توجه به مطالبی که در قسمت‌های (الف) تا (ج) بیان شد، برای تحلیل موتورهای عایق‌بندی شده، تغییرات ذیل در الگوریتم حل گنجانده می‌شود:

- در گام اول تعداد مناطق عایق‌بندی شده، نوع و مشخصات هر عایق (z_i, δ_i) از کاربر دریافت می‌شود؛

- پس از گام شبکه‌بندی (گام 3) یک گام جدید تحت عنوان "تعیین قید نهایی سوزش" ایجاد شده و طی آن مراحل زیر پیموده می‌شود:

1- تعیین معادله عایق‌بندی

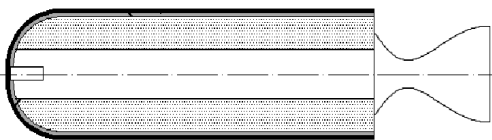
2- محاسبه مقدار برای هر گره از محور موتور

3- تعیین قید نهایی سوزش جدید $(R = \min(r, R))$

- در گام 5 محاسبه مشخصه‌های بالستیکی تا جایی ادامه می‌یابد که مرز به قید انتهایی جدید نرسیده باشد.

شایان ذکر است، اگرچه در کد تدوین شده تنها سه نوع عایق‌بندی به صورت پیش‌فرض در نظر گرفته شده، اما هر نوع عایقی که به صورت یک معادله ریاضی قابل بیان باشد را می‌توان اعمال و تحلیل نمود؛ بدین منظور معادله مربوط به نوع عایق‌بندی مستقیماً در گام "تعیین قید نهایی سوزش" به کار گرفته می‌شود.

علاوه بر این در بیش‌تر شبیه‌سازی‌ها ابتدا و انتهای گرین به صورت تخت فرض می‌شود، اما گاهی در سربند/ته‌بند موتور که به صورت کروی یا بیضی‌گون است مقدار گرین قرار می‌گیرد (شکل 3). این گونه موتورها را می‌توان مانند موتورهای عایق‌بندی شده، مدل‌سازی کرد؛ در این حالت فرض می‌شود در سرپوش یک عایق درجه دو قرار گرفته است.



شکل 3- نمونه‌ای از موتورهای سوخت جامد [7].

3-2- شبیه‌سازی گرین‌های چند نرخی

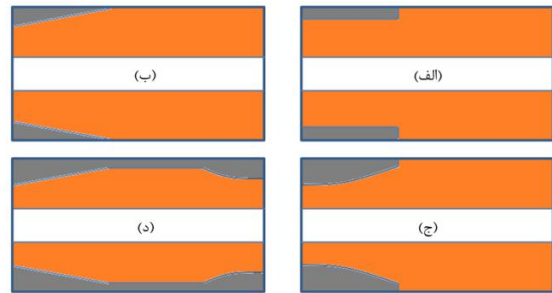
در برخی موارد با توجه به الزامات مأموریت، از گرین‌هایی با جنس‌های متفاوت (چند نرخی) استفاده می‌شود. بر حسب نحوه قرارگیری جنس‌های مختلف، این گرین‌ها را می‌توان به سه دسته زیر تقسیم کرد:

مطالعه موتورهای سوخت جامد مختلف نشان می‌دهد، انواع مختلف عایق‌بندی را می‌توان با یکی از مدل‌های شکل (1) توصیف کرد. بر این اساس برای مدل‌سازی عددی عایق‌بندی موتورها، سهروش زیر پیشنهاد می‌شود:

1- مدل‌سازی خطی (حالت‌های الف و ب)

2- مدل‌سازی درجه دو (حالت ج)

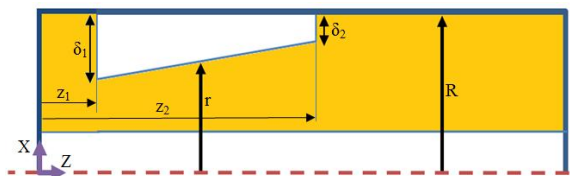
3- مدل‌سازی ترکیبی (حالت د)



شکل 1- حالات ممکن برای عایق‌بندی موتورهای سوخت جامد.

الف) مدل‌سازی خطی

همان‌گونه که اشاره شد، در تحلیل موتورهای معمولی هرگاه مرز به شعاع R برسد، پسروی متوقف می‌شود (قید انتهایی، شعاع موتور است) اما در تحلیل موتورهای عایق‌بندی شده، پسروی قبل از رسیدن مرز به بدنه موتور باید متوقف گردد، بنابراین نیاز به یک شعاع محلی برای هر گره طولی می‌باشد (شکل 2).



شکل 2- مدل‌سازی خطی عایق‌بندی موتور سوخت جامد.

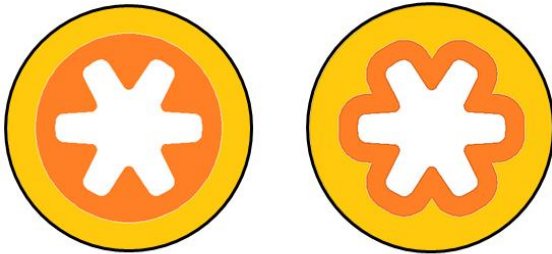
برای تعریف شعاع محلی بر حسب نقاط محوری (z) باید معادله‌ای به عایق‌بندی انجام شده تخصیص داد. در عایق‌بندی خطی با داشتن مختصات دو نقطه از مرز می‌توان معادله مورد نظر را به دست آورد. به همین دلیل در ابتدای اجرای برنامه نقاط شروع و اتمام عایق‌بندی (مانند z_1 و z_2 از شکل 2) و همچنین ضخامت عایق در این نقاط $(\delta_1$ و $\delta_2)$ از کاربر دریافت شده و قید انتهایی (مقدار r) برای هر نقطه محوری (z) تعیین می‌گردد.

ب) مدل‌سازی درجه دو

در مواردی شکل عایق‌بندی به نحوی است که برای توصیف آن نیاز به یک معادله درجه دوم می‌باشد. در این حالت نیز مشابه عایق‌بندی خطی، ضخامت و طول عایق در نقاط شروع و خاتمه از کاربر سؤال شده و یک قید انتهایی متناسب تعریف می‌شود.

ج) گرین‌های چند نرخی ترکیبی پیچیده

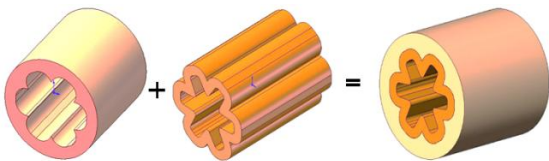
اگر قرار باشد دو پیشران با دو نرخ سوزش متفاوت، در راستای شعاعی هم قرار گیرند، دو حالت شکل (6) را می‌توان تصور نمود.



شکل 6- آرایش شعاعی دو نوع پیشران با نرخ سوزش متفاوت.

گرین حالت (الف) به سادگی و به کمک الگوریتم ارائه شده برای گرین‌های چند نرخی ترکیبی قابل تحلیل است اما حالت (ب) نیازمند الگوریتم متفاوتی می‌باشد:

- در گام تقسیم‌بندی گرین (پیش از گام اول)، ابتدا هندسه پیشران‌های مختلف در یک نرم‌افزار ترسیمی ایجاد شده (شکل 7)، سپس هر قسمت به کمک نرم‌افزار گمبیت شبکه‌بندی می‌شود و در نهایت فایل اطلاعات شبکه اولیه هر قسمت در برنامه اصلی فراخوانی می‌گردد.
- در گام اول، تعداد پیشران‌های مختلف (n) به همراه نرخ سوزش هر قسمت دریافت می‌شود؛
- در گام چهارم، نقاطی از شبکه ثانویه که در درون هر پیشران واقع شده‌اند، تعیین می‌گردد؛
- پس از گام چهارم و در گامیبا عنوان "تعیین تابع سرعت"، تابع سرعت در نقاط داخلی هر پیشران (با توجه به نرخ سوزش هر پیشران)، تصحیح می‌گردد.



شکل 7- تشکیل یک گرین ترکیبی پیچیده با نرم‌افزار سالیپورک.

3-3- شبیه‌سازی سوزش غیر یکنواخت

معمولاً در تحلیل‌های پسروری، نرخ سوزش (سرعت پسروری) در تمام زمان‌ها و برای کلیه نقاط یکسان (یکنواخت) فرض می‌شود. این فرض در مواقعی که اثر سوزش فرسایشی قابل توجه نباشد (تحلیل‌های صفربعدی)، منطقی است؛ اما از آنجا که نرخ سوزش گرین تابع فشار است و فشار داخلی موتور در قسمت‌های مختلف متغیر است، معمولاً

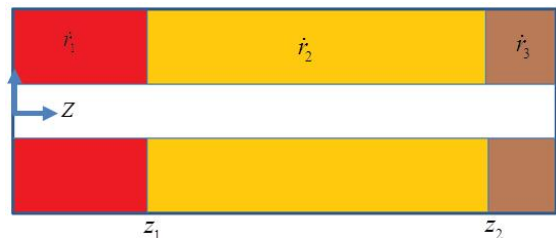
1- طولی

2- ترکیبی

3- ترکیبی پیچیده

الف) گرین‌های چند نرخی طولی

از نظر مدل‌سازی، ساده‌ترین نوع گرین چند نرخی گرین‌های طولی می‌باشد. برای تحلیل این نوع گرین که در آن جنس‌های مختلف مانند شکل (4) در راستای طولی به هم متصل شده‌اند، کفایت طول $(L_i = z_i - z_{i-1})$ و نرخ پسروری هر قسمت (\dot{r}_i) از کاربر سؤال شود.

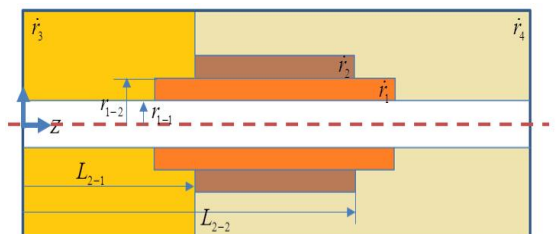


شکل 4- نمونه‌ای از گرین‌های چند نرخی طولی.

ب) گرین‌های چند نرخی ترکیبی

از آنجا که جنس‌های مختلف گرین می‌توانند در راستای طولی یا شعاعی هم قرار بگیرند، لازم است روشی کلی برای مدل‌سازی انواع گرین‌های چند نرخی تدوین شود. بدین منظور گرینی با مشخصات شکل (5) در نظر گرفته شده و با هدف تحلیل گرین‌های ترکیبی، الگوریتم کلاسیک به صورت زیر تصحیح می‌گردد:

- پیش از گام اول، گامی تحت عنوان "تقسیم‌بندی گرین" اضافه می‌گردد؛ در این گام جدید که قبل از اجرای برنامه و توسط کاربر انجام می‌گیرد، نواحی هم‌جنس تفکیک و شماره‌گذاری می‌شوند. شماره‌گذاری از ناحیه‌ای که کم‌ترین شعاع و طول را دارد شروع و در ناحیه‌ای با شعاع یا طول حداکثر پایان می‌یابد (شکل 5)؛
- در گام اول، مشخصات نواحی با جنس‌های متفاوت (L ابتدا و انتها، ابتدا و انتها و نرخ سوزش) از کاربر گرفته می‌شود؛
- پس از گام سوم، گامی تحت عنوان "تعیین تابع سرعت" ایجاد شده و طی آن با توجه به نرخ سوزش، تابع سرعت نواحی سوزش مختلف ($F_{i,j,k}$) تصحیح می‌گردد.



شکل 5- نمونه‌ای پیچیده از موتورهای چند نرخی ترکیبی.

- در گام اول و پیش از آغاز تحلیل‌ها، نوع گرین (نوع سوزش) از کاربر سؤال می‌گردد؛
- پس از گام سوم، در گامی قید نهایی پسروری متناسب با نوع گرین و جهت سوزش تعیین می‌شود؛
- در گام پنجم، محاسبه مشخصه‌های بالستیکی تا جایی ادامه می‌یابد که مرز به قید انتهایی نرسیده باشد.

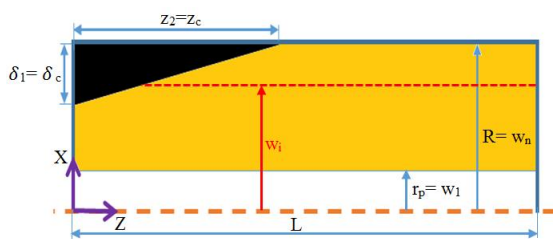
4- اعتبارسنجی نتایج

برای یک کار عددی بهترین نوع اعتبارسنجی، مقایسه نتایج کار با حل تحلیلی یا نتایج تجربی است. با توجه به اینکه تحلیل پسروری گرین صرفاً یک کار ریاضی است و نتایجی که به صورت تجربی تغییرات سطح سوزش نسبت به ضخامت جان را بیان کند عملاً وجود ندارد، بهترین نوع صحه‌گذاری در تحلیل پسروری گرین مقایسه نتایج با حل تحلیلی خواهد بود.

از آن جا که روابط تحلیلی برای پسروری گرین‌های سه‌بعدی پیچیده وجود ندارد، یک گرین ساده استوانه‌ای با شعاع پورت 20 میلی‌متر در موتوری به طول 100 و شعاع 60 میلی‌متر انتخاب شده و طی چهار مرحله روابطی تحلیلی برای حالات عایق‌بندی خطی، سوزش سه‌نرخ، سوزش با نرخ غیریکنواخت خطی و سوزش درونی- برونی استخراج می‌گردد.

4-1- اعتبارسنجی پسروری گرین‌های عایق‌بندی شده

در این بخش فرض می‌شود که گرین استوانه‌ای مفروض، مشابه شکل (8) به صورت خطی عایق‌بندی شده است. بر این اساس روابط مربوط به تغییرات سطح سوزش و حجم گذرگاه جریان با توجه به نحوه پسروری استخراج و به صورت روابط (15) و (16) ارائه می‌گردد.



شکل 8- نمایی از عایق‌بندی خطی گرین استوانه‌ای مفروض.

$$A_p = \begin{cases} 2\pi w_i L & r_p < w_i < r_c \\ 2\pi w_i \left[L - \frac{z_c}{\delta_c} (w_i - r_c) \right] & r_c \leq w_i \leq R \end{cases} \quad (15)$$

$$V_{ch} = \begin{cases} \pi w_i^2 L & r_p < w_i < r_c \\ \pi w_i^2 \left[L - \frac{z_c}{\delta_c} (w_i - r_c) \right] + \frac{\pi}{3} \left[w_i^2 \left(z_i + \frac{z_c}{\delta_c} r_c \right) - r_c^2 \frac{z_c}{\delta_c} \right] & r_c \leq w_i \leq R \end{cases} \quad (16)$$

که

سرعت پسروری در راستای محور موتور یکنواخت نمی‌باشد. بر این اساس در تحلیل‌های بالستیک داخلی یک‌بعدی، بهتر است سرعت پسروری در راستای محوری موتور به صورت غیریکنواخت در نظر گرفته شود.

با توجه به این که هدف اصلی از تحلیل پسروری، استخراج مشخصه‌های بالستیکی و تحلیل بالستیک داخلی می‌باشد، بهتر است کد عددی به نحوی تصحیح شود که در صورت لینک شدن با یک کد تحلیل بالستیک یک‌بعدی بتوان اثر سوزش غیریکنواخت (سوزش فرسایشی) را نیز بر نحوه پسروری اعمال کرد. بنابراین با هدف شبیه‌سازی اثر سوزش غیریکنواخت، الگوریتم کلاسیک به صورت زیر اصلاح می‌شود:

- در گام 5 مرحله‌ای با عنوان "تعیین نرخسوزش" اضافه می‌شود و با استفاده از آن در پایان هر گام زمانی نرخ سوزش در مقاطع طولی مختلف تعیین می‌گردد (\dot{r}_k). به عبارت دیگر در مرحله تعیین نرخ، با استفاده از مشخصه‌های بالستیکی محاسبه شده در هر گام زمانی، نرخ سوزش جدید برای هر مقطع طولی محاسبه می‌شود و با تصحیح $F_{i,j,k}$ در هر گره شبکه زمینه، تحلیل پسروری ادامه می‌یابد.

4-3- شبیه‌سازی سوزش‌های جهت‌دار

با توجه به الزامات ساختاری، اکثر گرین‌ها به صورت درون سوز طراحی می‌شوند، اما گاهی و به دلیل ویژگی‌های عملکردی، گرین‌های برون سوز، درون سوز- برون سوز، همه‌طرف سوز و سیگاری سوز نیز مورد توجه قرار می‌گیرند. بر خلاف گرین‌های درون سوز که سوزش همواره به صورت شعاعی و در راستای افزایشی است (مرز با تابع سرعت مثبت گسترش می‌یابد)، در سایر گرین‌های مذکور سوزش به صورت شعاعی- کاهشی، شعاعی- خنثی، شعاعی- محوری و یا محوری می‌باشد که به اختصار سوزش آن‌ها جهت‌دار نام‌گذاری می‌گردد.

در تحلیل‌های عددی سایر مراجع، سوزش جهت‌دار کمتر مورد بررسی قرار گرفته است که این مسئله به دلایل زیر می‌باشد:

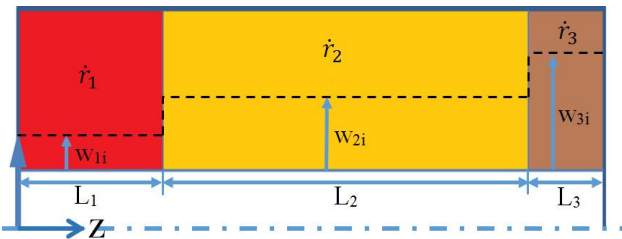
- ماهیت بیش‌تر روش‌های عددی به‌گونه‌ای است که تنها توانایی توصیف مرزهایی با سرعت مثبت شعاعی (گرین‌های درون سوز) را دارند [7]؛
- در اکثر الگوریتم‌ها قید انتهایی پسروری، رسیدن مرز به شعاع داخلی موتور در نظر گرفته شده است. بنابراین در موقعی که پسروری به صورت محوری باشد، الگوریتم حل دچار مشکل می‌شود.

از آنجا که روش سطوح هم‌تراز وابسته به زمان به صورت ذاتی توانایی تحلیل انواع پسروری را ندارد، برای شبیه‌سازی سوزش‌های جهت‌دار کفایت قید انتهایی سوزش به نحو مطلوب انتخاب گردد. بدین منظور تصحیح‌های زیر در الگوریتم کلاسیک انجام می‌گیرد:

- 1- سوزش فقط شعاعی بوده و از گسترش مرز در راستای محوری صرف‌نظر می‌گردد؛
- 2- نرخ سوزش پیشران‌ها متفاوت بوده و بیشترین و کم‌ترین نرخ به ترتیب \dot{r}_1 و \dot{r}_2 می‌باشند.
- با استفاده از این فرضیات و پارامترهای نشان داده شده در شکل (10)، معادله تغییرات مشخصه‌های بالستیکی به صورت روابط (17) و (18) استخراج می‌گردد.

$$A_p = \begin{cases} \sqrt{\pi[w_{r_i}L_i + w_{r_i}L_r + w_{r_i}L_r + \frac{r_r^2 - r_i^2}{\gamma}]} & w_{r_i} \leq R \\ \sqrt{\pi[w_{r_i}L_i + w_{r_i}L_r + \frac{R^2 - r_i^2}{\gamma}]} & w_{r_i} \leq R \\ \sqrt{\pi[w_{r_i}L_i + \frac{R^2 - r_i^2}{\gamma}]} & w_{r_i} \leq R \end{cases} \quad (17)$$

$$V_{ch} = \begin{cases} \pi[w_{r_i}^2L_i + w_{r_i}^2L_r + w_{r_i}^2L_r] & w_{r_i} \leq R \\ \pi[w_{r_i}^2L_i + w_{r_i}^2L_r + R^2L_r] & w_{r_i} \leq R \\ \pi[w_{r_i}^2L_i + R^2(L_r + L_r)] & w_{r_i} \leq R \end{cases} \quad (18)$$



شکل 10- نمایی از گرین استوانه‌ای سه‌نرخی مفروض.

با استفاده از مشخصات جدول (2) و شبکه اولیه‌ای با 6980 گره مرزی و 34327 المان، تحلیل پسروری گرین سه‌نرخی مفروض به صورت عددی انجام شده و نتایج نسبت به داده‌های حاصل از روابط (17) و (18) سنجیده می‌شود. همان‌گونه که منحنی‌های شکل (11) نشان می‌دهند، انطباق مطلوبی بین نتایج عددی و تحلیلی وجود دارد و علت اختلاف جزئی نتایج، فرض اولیه‌ای می‌باشد که در استخراج روابط تحلیلی از آن استفاده شده است.

جدول 2- پارامترهای گرین سه‌نرخی مفروض در شکل 10.

L_1 (mm)	L_2	L_3	\dot{r}_1 (mm/s)	\dot{r}_2	\dot{r}_3
30	30	40	1	1/5	2

3-4- اعتبارسنجی پسروری با نرخ سوزش یکنواخت

در این بخش فرض می‌شود نرخ سوزش در راستای محور موتور به صورت خطی و تحت معادله $\dot{r}_k = 0.5[(Z/L) + 1]$ تغییر می‌کند. با در نظر گرفتن پارامترهای مشخص شده در شکل (12)، روابط مربوط به

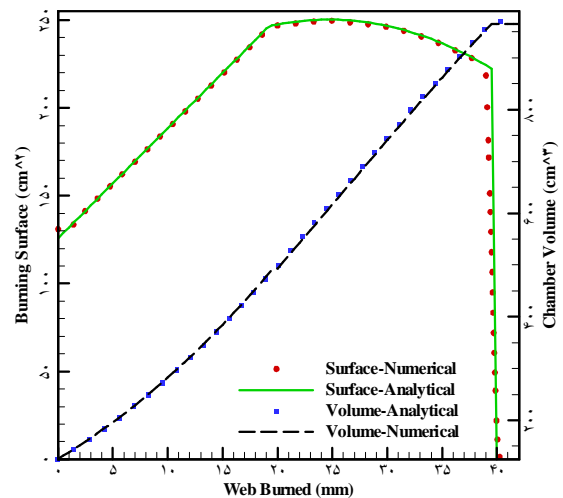
$$w_i = r_p + \dot{r}\Delta t(i-1)$$

$$r_c = R - \delta_c$$

با انتخاب شبکه اولیه‌ای با 6980 گره مرزی و 34327 المان و به ازای $\delta_c = 20\text{mm}$ و $z_c = 40\text{mm}$ پسروری گرین عایق‌بندی شده مفروض با دو روش عددی و تحلیلی انجام شده و تغییرات پارامترهای بالستیکی دو روش به صورت شکل (9) مورد مقایسه قرار می‌گیرند. با ارزیابی منحنی‌های این شکل می‌توان ادعا کرد که کد عددی ایجاد شده دقت بالایی در تحلیل پسروری گرین‌های عایق‌بندی دارد. با بررسی دقت نتایج نسبت به ابعاد شبکه (جدول 1)، به وضوح مشاهده می‌شود، ارتباط مستقیمی بین ابعاد شبکه، زمان اجرا و میزان دقت وجود دارد. به عبارت دیگر برای داشتن یک تحلیل دقیق و سریع باید شبکه‌ای مناسب انتخاب گردد.

جدول 1- بررسی تأثیر اندازه شبکه در دقت حل و زمان پردازش.

ابعاد شبکه	بیشترین درصد خطای A_p	بیشترین درصد خطای V_{ch}	زمان اجرا (sec)
70×70×60	3/23	4/56	1185
130×130×110	1/25	1/43	2698
160×160×135	1/11	1/28	6652

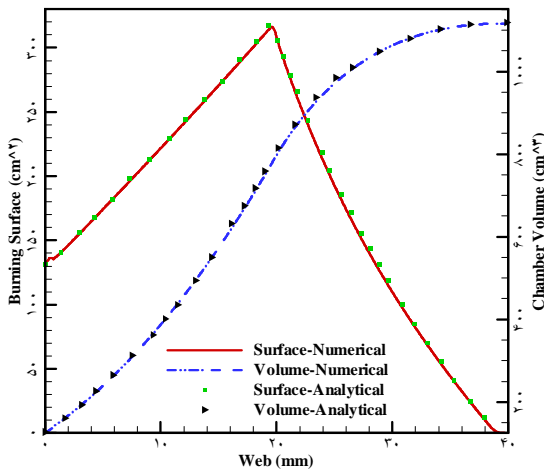


شکل 9- تغییرات مشخصه‌های بالستیکی گرین عایق‌بندی شده با دو روش عددی و تحلیلی.

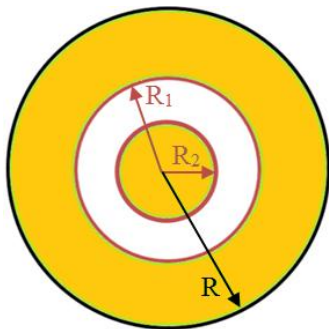
2-4- اعتبارسنجی پسروری گرین‌های چند نرخی

برای اعتبارسنجی پسروری گرین‌های چند نرخی، یک گرین سه‌نرخی طولی انتخاب می‌گردد. با توجه به پیچیدگی پسروری این نوع گرین، فرضیات ساده‌کننده زیر برای استخراج روابط تحلیلی در نظر گرفته می‌شود:

سطح بیرونی و درونی می‌سوزد، بنابراین پسروی به صورت شعاعی - خنثی خواهد بود.



شکل 13- مقایسه نتایج پسروی در گرین استوانه‌ای مفروض.



شکل 14- نمایی از یک گرین استوانه‌ای درون سوز-بیرون سوز.

با توجه به این که در گرین استوانه‌ای درون سوز-بیرون سوز، مرز متحرک دو دایره هم‌مرکز است که یکی بزرگ و دیگری کوچک می‌شود، پسروی این گرین با روابط تحلیلی (21) و (22) قابل توصیف است.

$$A_p = 2\pi(R_{i1} + R_{i2})L \quad (21)$$

$$V_{ch} = \pi(R_{i1}^2 - R_{i2}^2)L \quad (22)$$

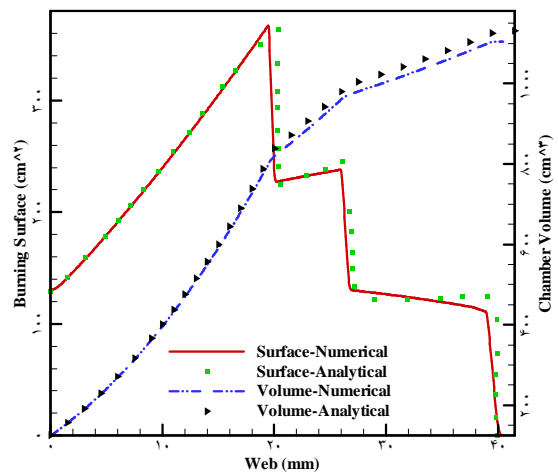
که در این روابط $R_{i1} = R_1 - \dot{r}\Delta t$ و $R_{i2} = R_2 + \dot{r}\Delta t$ می‌باشد.

با انتخاب $R_1 = 35 \text{ mm}$ و $R_2 = 25 \text{ mm}$ ، پسروی گرین مفروض با دو روش تحلیلی و عددی مقایسه و به صورت شکل (15) ارائه می‌شود. منحنی‌های این شکل، توانایی بالای کد عددی را در تحلیل گرین‌هایی با سوزش جهت‌دار تایید می‌کند.

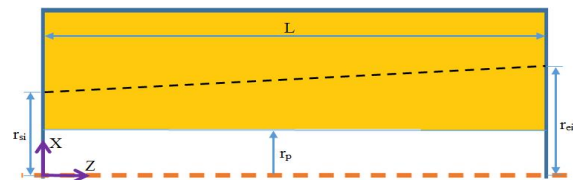
5- تحلیل پسروی گرین‌های پیچیده

در قسمت قبل با استفاده از یک گرین ساده استوانه‌ای و روابط تحلیلی، دقت و صحت الگوریتم تصحیح شده در حالات مختلف اثبات شد. با توجه به این که برای گرین‌های با هندسه و یا قیودهای پیچیده امکان

تغییرات سطح سوزش و حجم گذرگاه جریان استخراج می‌گردد (روابط 19 و 20).



شکل 11- تغییرات مشخصه‌های بالستیکی گرین استوانه‌ای سه‌نرخی مفروض با دو روش عددی و تحلیلی.



شکل 12- نمایی از گرین استوانه‌ای مفروض با نرخ سوزش خطی.

$$A_p = \begin{cases} \pi(r_{ei}^2 - r_{si}^2) \sqrt{\left(\frac{L}{r_{ei} - r_{si}}\right)^2 + 1} & r_{ei} < R \\ \pi R \sqrt{\left(z_i + \frac{r_s L}{r_{ei} - r_{si}}\right)^2 + R^2} - r_{si}^2 \sqrt{\left(\frac{L}{r_{ei} - r_{si}}\right)^2 + 1} & r_{ei} = R \text{ \& } r_{si} < R \end{cases} \quad (19)$$

$$V_{ch} = \begin{cases} \frac{\pi L}{3} [r_{ei}^3 + r_{si} r_{ei} + r_{si}^2] & r_{ei} < R \\ \frac{\pi z_i}{3} [R^3 + R r_{si} + r_{si}^2] + \pi R^2 (L - z_i) & r_{ei} = R \text{ \& } r_{si} < R \end{cases} \quad (20)$$

که در این روابط $r_{ei} = r_p + (i-1)dt$ و $r_{si} = r_p + 0.5(i-1)dt$ می‌باشد.

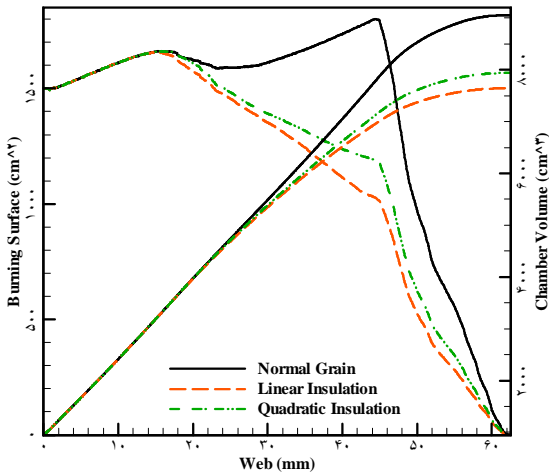
با استفاده از شبکه‌ای به ابعاد $130 \times 130 \times 110$ ، پسروی گرین مفروض به صورت عددی تحلیل شده و با نتایج روابط (19) و (20) مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

همان گونه که شکل (13) و مقایسه منحنی‌های سطح سوزش و حجم گذرگاه جریان نشان می‌دهد، الگوریتم تدوین شده قابلیت بالایی در تحلیل پسروی با نرخ سوزش غیریکنواخت دارد.

4-4- اعتبارسنجی پسروی با سوزش‌های جهت‌دار

یکی از گرین‌هایی که سوزش آن به صورت جهت‌دار است، گرین درون-سوز-بیرون سوز می‌باشد (شکل 14). در این گرین سوخت همزمان از

می‌گردد. همان‌گونه که این شکل نشان می‌دهد، عایق‌کاری تأثیر قابل توجهی در روند تغییرات پارامترهای بالستیکی دارد. همچنین با مقایسه منحنی‌های عایق‌بندی خطی و مرتبه دوم مشاهده می‌شود، نوع مدل‌سازی عایق می‌تواند تأثیر قابل توجهی در نتایج نهایی داشته باشد.



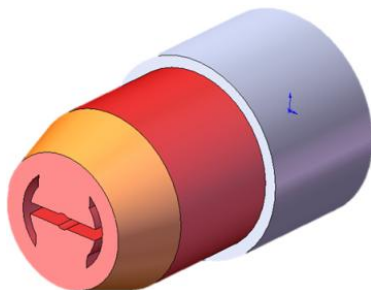
شکل 17- مقایسه پسروی گرین ستاره بدون عایق‌بندی، با عایق‌بندی خطی و مرتبه دوم.

ب) عایق‌بندی ترکیبی

به منظور بررسی تأثیر عایق‌بندی ترکیبی در نتایج پسروی، یک گرین لنگری به طول 350 میلی‌متر در نظر گرفته شده و فرض می‌شود مشابه شکل (18) همزمان دو عایق‌بندی خطی و درجه دو با مشخصات جدول (4) در این گرین به کار رفته است.

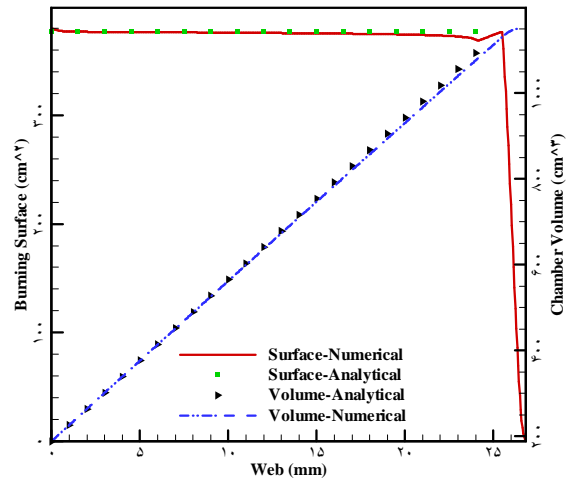
جدول 4- پارامترهای عایق‌بندی گرین لنگری.

پارامتر				روش عایق‌بندی
z_1	δ_1	z_2 (mm)	δ_2 (mm)	
250	5	150	5	خطی
350	30	250	5	مرتبه دوم



شکل 18- شماتیکی از عایق‌بندی ترکیبی در گرین لنگری مفروض.

حل تحلیلی وجود ندارد، در این بخش با کمک کد عددی پسروی چند گرین پیچیده بررسی می‌شود.



شکل 15- مقایسه تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق گرین درون سوز - برون سوز مفروض با دو روش عددی و تحلیلی.

1-5- تحلیل گرین‌های عایق‌بندی شده

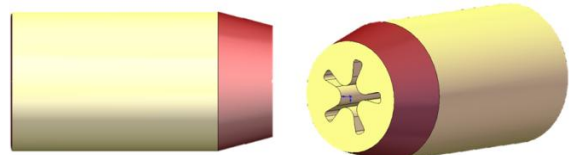
با دو هدف تحلیل پسروی گرین‌های عایق‌بندی شده و بررسی تأثیر عایق‌بندی بر مشخصه‌های بالستیکی موتور، سه حالت پیشنهاد شده برای مدل‌سازی عایق (خطی، درجه دو و ترکیبی) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

الف) عایق‌بندی خطی و درجه دو

یک گرین ستاره‌ای به طول 300 میلی‌متر در نظر گرفته و فرض می‌شود بر اساس داده‌های جدول (3)، قسمت انتهایی موتور به صورت خطی و با مرتبه دو عایق‌بندی شده است (شکل 16).

جدول 3- پارامترهای عایق‌بندی گرین ستاره.

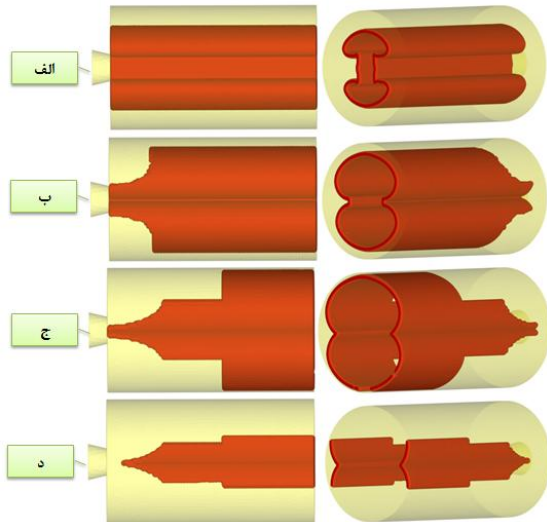
پارامتر				روش عایق‌بندی
z_1	δ_1	z_2 (mm)	δ_2 (mm)	
300	30	150	5	خطی
300	25	180	2	مرتبه دوم



شکل 16- نمایی از گرین ستاره مفروض پس از عایق‌بندی.

مطابق با الگوریتم تشریح شده در بخش 3-1، پسروی گرین ستاره با دو عایق‌بندی مفروض تحلیل می‌شود و منحنی‌های تغییرات سطح سوزش و حجم محفظه احتراق به صورت نمودارهای شکل (17) ترسیم

در انتها پروفیل پسروی گرین لنگری مفروض از کد عددی استخراج و به صورت شکل (21) نمایش داده می‌شود. نکته قابل توجه در این شکل، تأثیر عایق‌بندی در نحوه پسروی می‌باشد، به گونه‌ای که در گام (الف) هنوز سوزش به عایق نرسیده، در گام (ب) سوزش به عایق مرتبه دوم رسیده و در گام (ج) و د هر دو نوع عایق بر سوزش اثر می‌گذارند.



شکل 21- پروفیل پسروی گرین لنگری مفروض با عایق‌بندی ترکیبی.

2-5- تحلیل گرین‌های چند نرخی

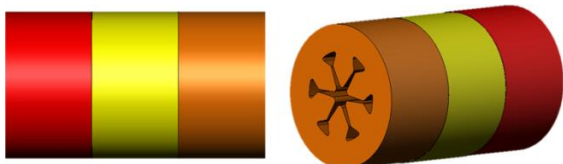
در بخش 2-3، گرین‌های چند نرخی به سه دسته طولی، ترکیبی و ترکیبی پیچیده تقسیم و برای هر یک الگوریتم منحصر به فردی ارائه گردید. در این بخش با استفاده از الگوریتم‌های مذکور، پسروی انواع گرین‌های چند نرخی بررسی می‌شود.

الف) گرین چند نرخی طولی

با هدف بررسی تفاوت نتایج پسروی گرین‌های چند نرخی و تک‌نرخی، یک گرین پیچیده چرخ‌واگن سه‌نرخی با مشخصات جدول (5) انتخاب و مشابه شکل (22) مدل‌سازی می‌شود.

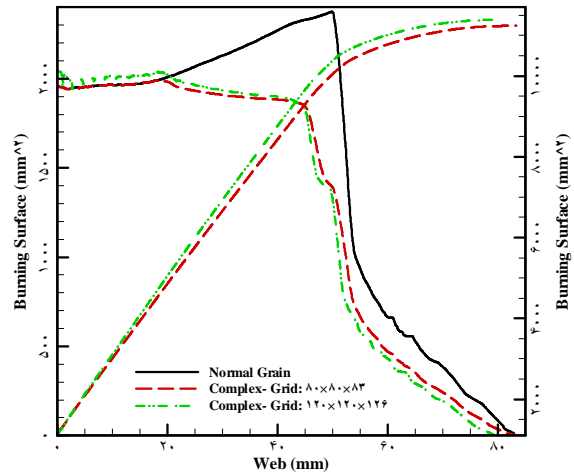
جدول 5- پارامترهای گرین سه‌نرخی مفروض در شکل 10.

L (mm)	Z ₁ (mm)	Z ₂	\dot{r}_1 (mm/s)	\dot{r}_2	\dot{r}_3
600	200	400	1	2	3



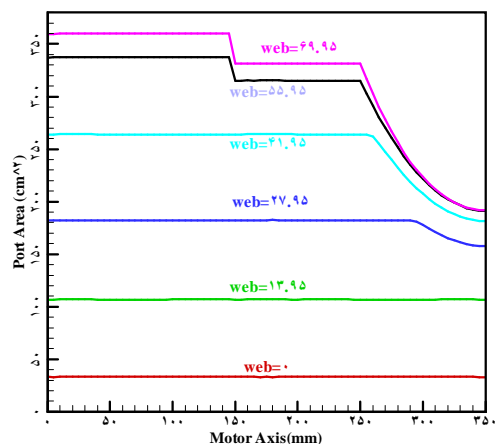
شکل 22- گرین سه‌نرخی طولی با مقطع چرخ‌واگن.

در کد عددی، گرین لنگری مفروض در دو حالت عادی و همراه با عایق‌بندی تحلیل می‌شود و نتایج پسروی به صورت شکل (19) ترسیم می‌گردد. همان‌گونه که مشخص است، در حالت عادی منحنی سطح سوزش گرین از سه مرحله سوزش خنثی، افزایشی و کاهش‌ی تشکیل شده اما عایق‌بندی با حذف مرحله افزایشی، منحنی سطح سوزش گرین را به خنثی - کاهش‌ی تغییر می‌دهد.



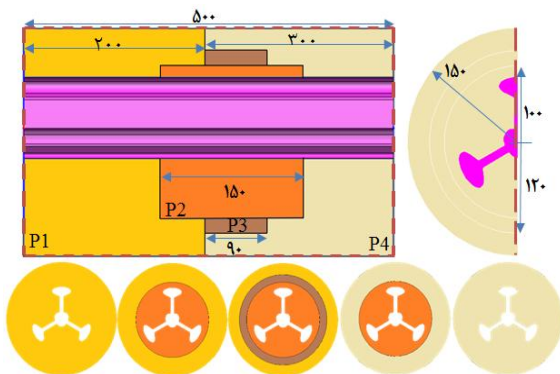
شکل 19- منحنی تغییرات پارامترهای بالستیکی گرین لنگری با عایق‌بندی ترکیبی.

مهم‌ترین نکته‌ای که از بررسی شکل‌های (17) و (19) برداشت می‌شود، اهمیت مدل‌سازی عایق‌ها در مسئله تحلیل پسروی است؛ به عبارت دیگر، در موتورهایی که ضخامت عایق‌بندی در طول موتور یکسان نیست نباید از اثرات عایق‌ها صرف‌نظر کرد. برای درک بهتر تأثیر عایق‌بندی بر مشخصه‌های بالستیکی گرین، تغییرات سطح گذرگاه جریان در طول موتور محاسبه و به صورت شکل (20) نشان داده می‌شود.



شکل 20- تغییرات سطح گذرگاه جریان در طول گرین لنگری با عایق‌بندی ترکیبی.

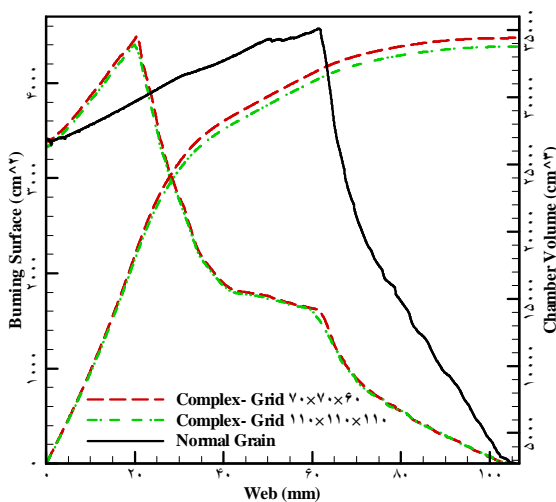
آرایش پیشران‌ها به صورت اغراق‌آمیز و غیرعملیاتی در نظر گرفته می‌شود (شکل 25).



شکل 25- آرایش پیشران‌ها در گرین داگبون چهارنرخی.

پسروری گرین مفروض با الگوریتم ارائه شده در بخش 3-2-ب و دو شبکه $70 \times 70 \times 60$ و $110 \times 110 \times 110$ تحلیل و نتایج به صورت شکل (26) نمایش داده می‌شود.

منحنی‌های شکل (26) به خوبی نحوه تغییرات سطح سوزش گرین داگبون چهارنرخی و تکنرخی را توصیف می‌کند. همان‌گونه که در این شکل مشخص است، استفاده از پیشران‌هایی با نرخ‌های سوزش متفاوت می‌تواند موجب افزایش چشم‌گیر سطح سوزش در مرحله اول پسروری شود.



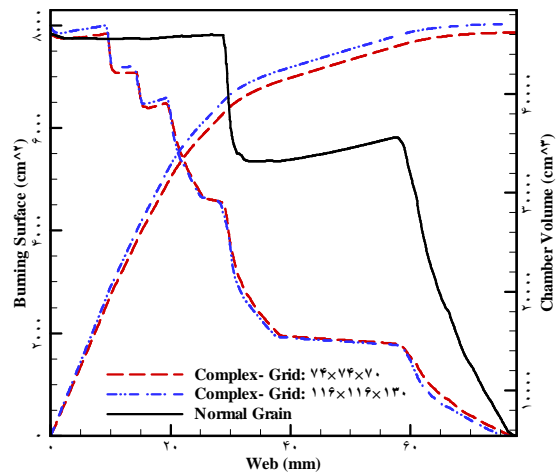
شکل 26- منحنی تغییرات مشخصه‌های بالستیکی گرین داگبون چهارنرخی.

نرخ سوزش پیشران‌های گرین مفروض (P_1 تا P_4) به ترتیب 1، 2، 2/5 و 3 در نظر گرفته شده که تأثیر هر یک را می‌توان در شکل (27) مشاهده کرد. البته با توجه به شعاع قرارگیری P_2 و P_3 مناسب‌ترین

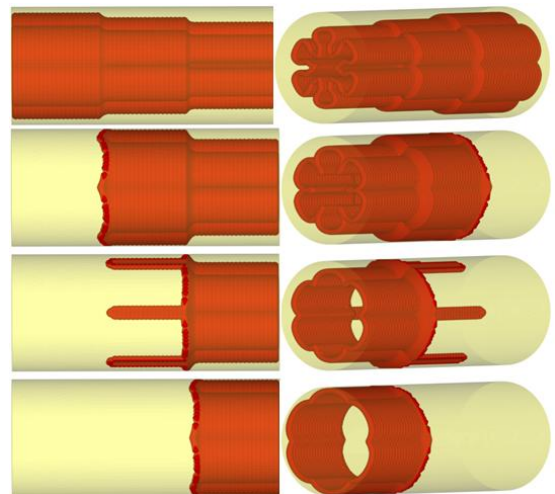
با استفاده از دو الگوریتم کلاسیک و تصحیح شده، پسروری گرین چرخ‌واگن مفروض تحلیل می‌گردد و نتایج به صورت شکل (23) مورد مقایسه قرار می‌گردد.

همان‌گونه که منحنی‌های شکل (23) نشان می‌دهد، در حالت تک-نرخی سطح سوزش به صورت خنثی-افزایشی-کاهشی است اما در حالت چندنرخی سطح سوزش شکل پلکانی دارد. البته باید توجه کرد، در حالت کلی شکل منحنی‌های چند نرخی بسیار وابسته به نرخ‌های پسروری دارد.

برای درک بهتر نحوه پسروری در حالت چند نرخی طولی، پروفیل پسروری گرین به صورت شکل (24) نمایش داده می‌شود.



شکل 23- مقایسه منحنی تغییرات مشخصه‌های بالستیکی گرین چرخ‌واگن تکنرخی و سه‌نرخی.

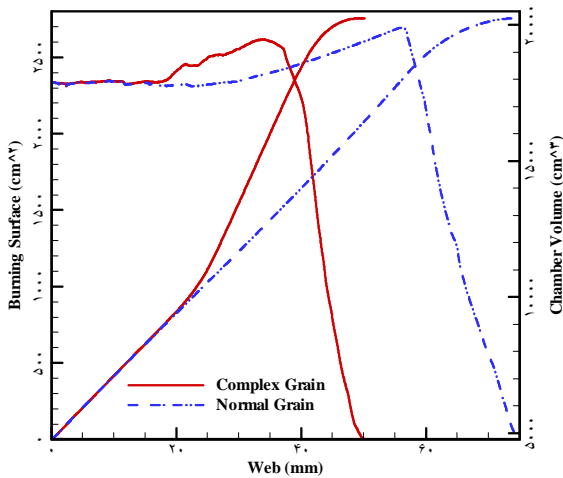


شکل 24- پروفیل پسروری گرین چرخ‌واگن سه‌نرخی.

ب) گرین چند نرخی ترکیبی

هندسه‌ای که برای تحلیل پسروری گرین‌های چند نرخی ترکیبی انتخاب می‌شود، داگبون است. برای بیان توانایی الگوریتم حل، نحوه

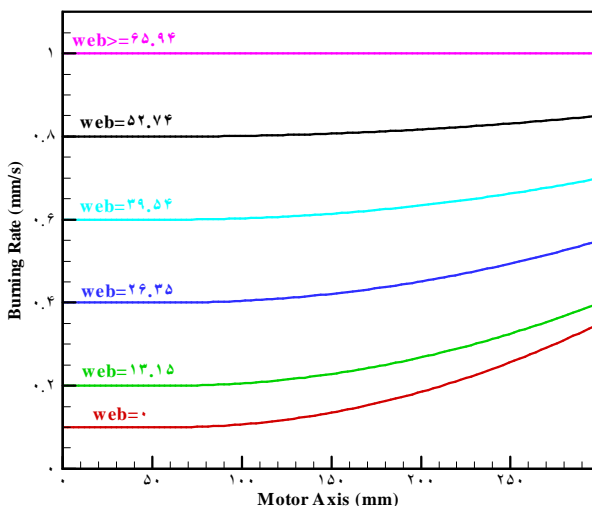
پیشران دوم به علت افزایش سرعت پسروی، سطح سوزش به یکباره افزایش می‌یابد. نکته‌ی دیگری که می‌تواند مد نظر قرار گیرد، کاهش سوزش مرحله پسماندها می‌باشد.



شکل 29- منحنی تغییرات مشخصه‌های بالستیکی گرین ستاره دوترخی.

3-5- تحلیل گرین‌های با نرخ سوزش غیریکنواخت

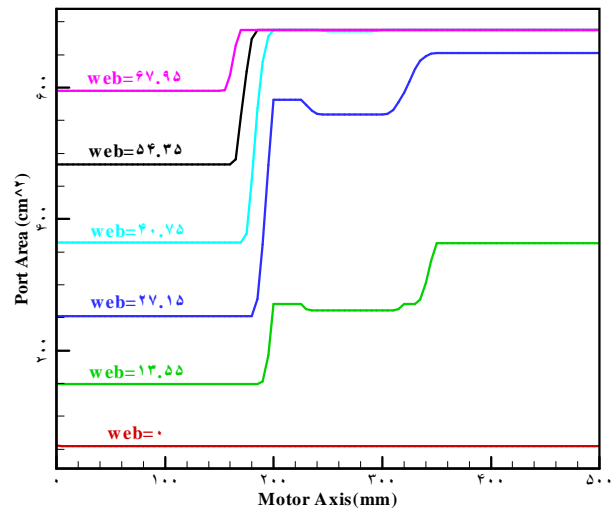
پیش از این اشاره شد، سوزش غیریکنواخت در تحلیل بالستیک داخلی یک‌بعدی مطرح است و مستقلاً در تحلیل پسروی قابل بررسی نیست؛ به عبارت دیگر برای تحلیل پسروی با نرخ غیریکنواخت نیاز است نرخ سوزش در طول موتور به کمک تحلیل بالستیک داخلی محاسبه شود. با در نظر گرفتن این مسئله و به منظور بررسی تأثیر پدیده‌ای همچون سوزش فرسایشی بر نحوه پسروی و در نتیجه عملکرد موتور، یک نمونه پروفیل نرخ سوزش واقعی به صورت شکل (30) انتخاب و مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل 30- پروفیل نرخ سوزش موتوری تحت تأثیر سوزش فرسایشی [16].

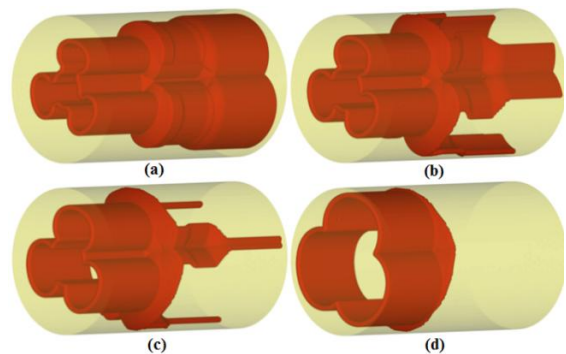
گرین ستاره‌ای با مشخصات مرجع [1] و به طول 300 انتخاب شده و با اعمال پروفیل سرعت شکل (30)، نتایج پسروی گرین به صورت شکل

گزینه برای درک نحوه محاسبات پارامترهای بالستیکی، منحنی جان‌های 13/55 و 27/15 می‌باشد.



شکل 27- تغییرات سطح گذرگاه جریان در طول گرین داگیون چند نرخی مفروض.

در انتها نحوه پسروی این گرین (پروفیل پسروی) استخراج و به صورت شکل (28) نمایش داده می‌شود.



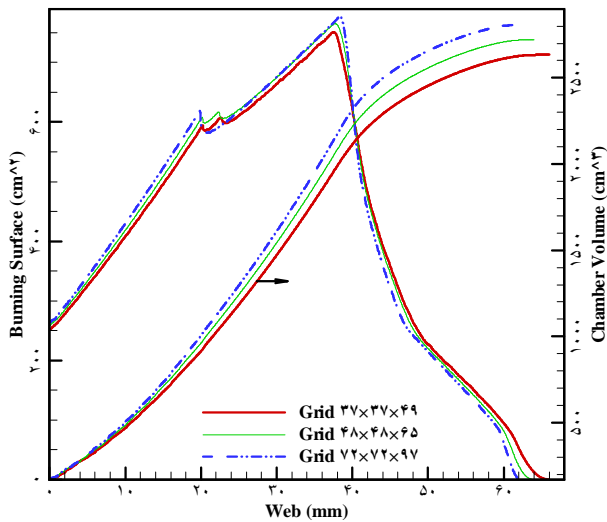
شکل 28- پروفیل پسروی گرین داگیون چهارنرخی مفروض.

ج) گرین چند نرخی ترکیبی پیچیده

همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد، پیچیده‌ترین حالتی که در تحلیل گرین‌های چند نرخی می‌توان متصور شد، آرایشی شبیه به شکل (6-الف) می‌باشد. با در نظر گرفتن این نوع آرایش، یک گرین ستاره‌ای به طول 300 میلی‌متر انتخاب شده و با استفاده از الگوریتم ارائه شده در بخش 3-2-ج، نتایج تحلیل پسروی به صورت شکل (29) ارائه می‌گردد.

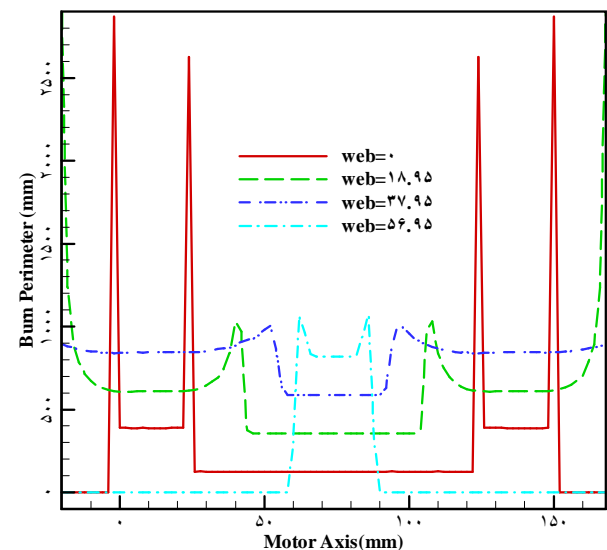
در گرین ستاره مورد بررسی، نرخ سوزش پیشران اول (با شعاع کمتر)، 1 و پیشران دوم، 2 فرض شده است. همان‌گونه که در شکل (29) مشاهده می‌شود، از زمان شروع سوزش تا اتمام پیشران اول منحنی گرین چند نرخ و گرین معمولی کاملاً منطبقند، اما در مرحله سوزش

عبارت دیگر حل دقیق پسروری زمانی ایجاد می‌شود که با ریزتر کردن ابعاد اختلاف محسوسی در منحنی‌ها مشاهده نشود.



شکل 33- منحنی‌های تغییرات مشخصه‌های بالستیکی گرین همه‌طرف‌سوز مفروض.

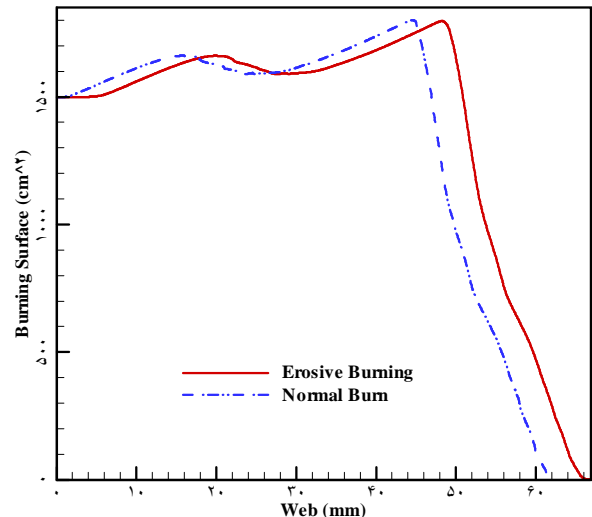
با استفاده از یک شبکه ثانویه مناسب، تحلیل پسروری انجام شده و تغییرات محیط سوزش و سطح گذرگاه جریان در راستای محور طولی استخراج و به صورت منحنی‌های (34) و (35) ارائه می‌گردد.



شکل 34- تغییرات محیط سوزش در طول گرین همه‌طرف‌سوز.

با دقت به شکل‌های (34) و (35) تا حدودی می‌توان نحوه پسروری گرین را حدس زد اما نحوه دقیق پسروری به صورت شکل (36) نمایش داده می‌شود.

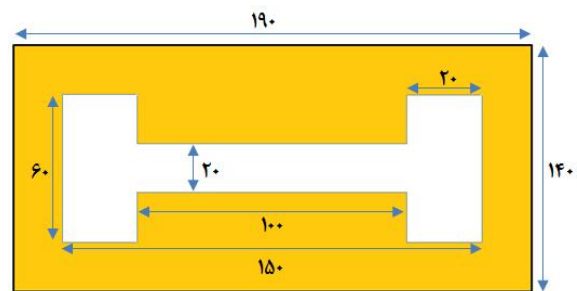
(31) نشان داده می‌شود. این شکل به خوبی نشان می‌دهد، سوزش فرسایشی تا حد زیادی در پسروری و مقدار سطح سوزش مؤثر است. بنابراین اهمیت در نظر گرفتن نرخ سوزش غیریکنواخت و تأثیر آن در تحلیل یک‌بعدی جریان به خوبی مشخص می‌گردد.



شکل 31- منحنی تغییرات سطح سوزش گرین ستاره با نرخ سوزش غیریکنواخت.

4-5- تحلیل گرین‌های با سوزش‌جهت‌دار

یکی از گرین‌های با سوزش جهت‌دار، گرین همه‌طرف‌سوز است که در آن علاوه بر سطح جانبی هر دو پیشانی هم می‌سوزد. به منظور مدل‌سازی این نوع سوزش، گرینی با مشخصات شکل (32) انتخاب و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.



شکل 32- نمای از گرین همه‌طرف‌سوز مفروض.

برای تحلیل پسروری گرین مفروض، شبکه اولیه‌ای با 8198 گره و 38927 المان چهاروجهی در حجم مندرل تولید شده و با استفاده از سه شبکه ثانویه متفاوت، نتایج پسروری به صورت منحنی‌های شکل (33) ارائه می‌گردد.

با توجه به اختلاف زیاد منحنی‌های شکل (33) و این‌که هر چه شبکه ریزتر شده دقت روش بالاتر رفته، استنباط می‌شود که ابعاد مناسب برای تحلیل این گرین ریزتر از مقادیر انتخاب شده است. به

- عایق بندی موتور تأثیر قابل توجهی در نتایج پسروری و مشخصه‌های بالستیکی دارد، بنابراین نباید در تحلیل‌های پسروری از اثر عایق‌ها صرف نظر شود؛
- نحوه مدل سازی عایق (خطی، ترکیبی و ...) می تواند تأثیر قابل توجهی در نتایج نهایی داشته باشد؛
- در گرین‌های چند نرخ با تنظیم آرایش (طول، شعاعی) و نرخ سوزش‌های متفاوتی توان به منحنی‌های عملکرد متنوعی دست یافت.
- سوزش فرسایشی تأثیر قابل توجهی بر نتایج پسروری دارد.

7- فهرست علائم

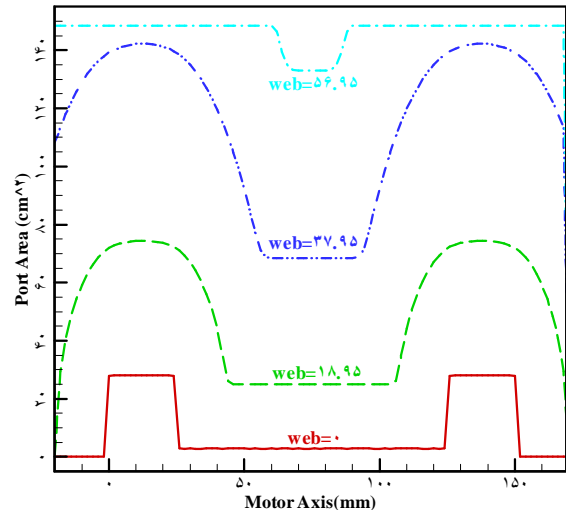
A	سطح سوزش دوبعدی (mm^2)
D^+	مشتق پیشرو
D^-	مشتق پسرو
F	سرعت حرکت مرز (mm/s)
G	تابع شار عددی
g	تابع شار عددی
H	همیلتونین
L	طول گرین (mm)
n	تعداد پیشران‌ها
\bar{n}	بردار یکه عمود بر مرز
P	محیط سوزش (mm)
R	شعاع موتور (mm)
r	شعاع محلی قرارگیری عایق (mm)
\dot{r}	نرخ پسروری گرین (mm/s)
S	سطح سوزش سه‌بعدی (cm^3)
$T(x, y)$	زمان عبور منحنی از x و y (s)
V	حجم گذرگاه جریان (cm^3)
x, y, z	مختصات گره در شبکه کارترین (mm)

علائم یونانی

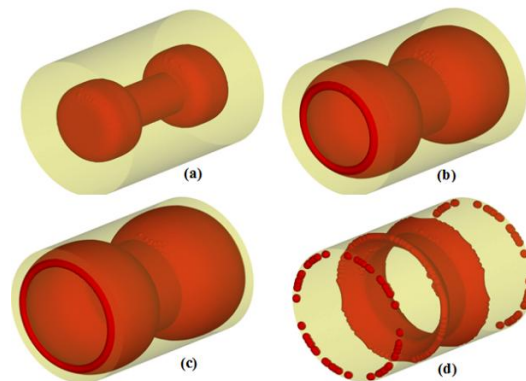
δ	ضخامت عایق
Γ	تابع موقعیت مرز
φ	تابع حداقل فاصله (یا تابع منحنی‌های تراز)
Ω	کل دامنه حل

زیر نویس‌ها

b	سوزش
c	عایق
ch	محفظه احتراق
cut	محل تقاطع مرز و المان
e	انتهای



شکل 35- تغییرات سطح گذرگاه جریان در طول گرین همه‌طرف‌سوز.

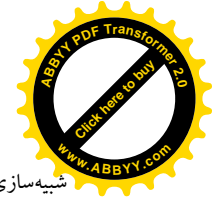


شکل 36- پروفیل پسروری گرین همه‌طرف‌سوز.

6- نتیجه گیری

در این تحقیق با تصحیح الگوریتم کلاسیک روش سطوح هم‌تراز، سعی شد پسروری عددی انواع گرین‌های سه‌بعدی پیچیده در چهار حالت‌عایق بندی شده، چند نرخ، با نرخ سوزش غیریکنواخت و با سوزش جهت دار شبیه‌سازی شود. تصحیح‌های الگوریتم کلاسیک در چهار مرحله و به نحوی صورت گرفت که امکان مدل سازی عایق‌ها (خطی، درجه دو و ترکیبی)، سربند و ته‌بند موتور، گرین‌های چند نرخ (طول و شعاعی)، سوزش فرسایشی و سوزش جهت‌دار (گرین‌های درون‌سوز - برون‌سوز، سیگاری سوز و همه‌طرف‌سوز) فراهم می‌گردد. برای اعتبارسنجیکد عددی، یک گرین استوانه‌ای در نظر گرفته شد و نتایج عددی پسروری با نتایج حل تحلیلی در چهار حالت عایق بندی خطی، سه‌نرخ طولی، با نرخ سوزش غیریکنواخت خطی و درون‌سوز - برون‌سوز، مقایسه شد. در نهایت پسروری چند گرین پیچیده مورد ارزیابی قرار گرفت که مهم‌ترین نتایج حاصل از بررسی‌ها به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

- روش سطوح هم‌تراز و الگوریتم تصحیح شده توانایی تحلیل هر نوع گرینی با هر پیچیدگی و قید انتهایی را دارد؛



[۸] Ashgriz, N.; Poo, J. Y. "Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction"; J. Comput. Phys. ۱۹۹۱, ۹۳, ۴۴۹-۴۶۸.

EO روش انکوویست - اوش

P پورت

S ابتدا

[۹] Hejl, R. J.; Heister, S. D. "Solid Rocket Motor Grain Burnback Analysis Using Adaptive Grids"; ۳۰th AIAA, ASME, SAE, and ASEE, Joint Propulsion Conference and Exhibit, Indianapolis, ۱۹۹۴.

[۱۰] Willcox, M. A.; Quinn Brewster, C.; Tang, K. M.; Stewart, S. D. "Solid Propellant Grain Design and Burn Back Simulation Using a Minimum Distance Function"; J. Propul. Power ۲۰۰۷, ۲۳, ۴۶۵-۴۷۵.

[۱۱] Yildirim, C.; Aksel, H. "Numerical Simulation of the Grain Burnback in Solid Propellant Rocket Motor"; AIAA-۲۰۰۵-۴۱۶۰, ۴۱th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Tucson, Arizona, ۲۰۰۵.

[۱۲] Favivi, B.; Cavallini, E.; Di Giacinto, M.; Serraglia, F. "An Ignition-to-Burn Out Analysis of SRM Internal Ballistic and Performances"; AIAA-۲۰۰۸-۰۵۱۴۱, ۴۴th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Hartford, CT, ۲۰۰۸.

[۱۳] Cavallini, E. "Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics"; Ph.D. Thesis, Dep. of Mechanical and Aeronautical Engineering, Sapienza University, Italy, ۲۰۰۶.

[14] قیصری، محمد مهدی و میرساجدی، سیدمهدی "تحلیل عددی پسروی گرین موتورهای سوخت جامد با روش منحنی‌های تراز بهبودیافته"، مجله علمی پژوهشی مواد پرنانژی، سال هشتم، شماره 2، صفحه 57-68، تابستان 1392.

[۱۵] Sethian, J. A. "Level Set Methods and Fast Marching methods"; ۲th ED, Cambridge University Press: Berkeley, ۱۹۹۹.

[۱۶] Yildirim, C. "Analysis of Grain Burnback and Internal Flow in Solid Propellant Rocket Motors in ۳-Dimensions"; Ph.D. Thesis, Dep. of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkey, ۲۰۰۷.

[17] قیصری، محمد مهدی و میرساجدی، سیدمهدی "تحلیل عددی پسروی گرین-های سه‌بعدی موتورهای سوخت جامد بر اساس روش سطوح هم‌تراز"، دومین کنفرانس انجمن پیشران‌های هوافضای ایران، تهران، دانشگاه تربیت مدرس، 29-30 آبان 1392.

[1] مشیر استخاره، سیدقاسم و مستوفی‌زاده، علیرضا "شبیه‌سازی عددی سه‌بعدی پسروی گرین در موتور موشک سوخت جامد بر اساس روش مجموعه سطوح"، مجله علمی پژوهشی مواد پرنانژی، سال هفتم، شماره 3، صفحه 29-39، پاییز 1391.

[۲] Puskulcu, G. "Analysis of ۳-D Grain Burn-back of Solid Propellant Rocket Motors and Verification with Rocket Motor Tests"; MS Thesis, Dep. of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkey, ۲۰۰۴.

[۳] Ucar, R. "Solid Propellant and Internal Ballistics"; MS Thesis, Dep. of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkey, ۱۹۹۳.

[۴] French, J. C.; Dunn, S. S. "New Capabilities in Solid Rocket Motor Grain Design Modeling (SPP ۰۲)"; ۳۸th JANNAF Combustion Subcommittee Meeting, Nevada, ۲۰۰۲, ۳۱۷-۳۳۱.

[5] حیدری، محمدرضا و آدمی، امیرحسین "تحلیل گرین‌های عمومی و شبیه‌سازی سریع بالستیک داخلی موتور سوخت جامد"، مجله علمی پژوهشی مواد پرنانژی، سال پنجم، شماره 2، صفحه 59-79، پاییز و زمستان 1389.

[6] ابطیعی، سید حامد و مرادی، مهدی "مدل‌سازی هندسی سه‌بعدی پسروی سطح سوزش در گرین موتور سوخت جامد با پروقیل کاملاً پیچیده به کمک نرم‌افزار SolidWork"، ششمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، اسفند 1385.

[۷] Toker, K. A. "Three Dimensional Retarding Walls and Flow in Their Vicinity"; Ph.D. Thesis, Dep. of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkey, ۲۰۰۴.

مراجع